PROPÓSITOS:

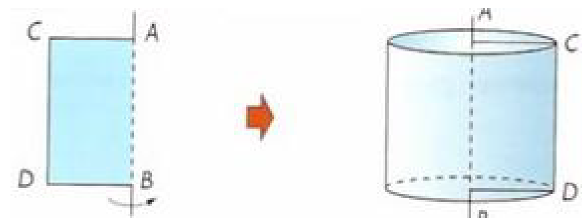
- ✓ **Identificar los cuerpos redondos o de revolución.**
- ✓ **Resolver problemas, donde se aplique el volumen y área de cuerpos de revolución.**

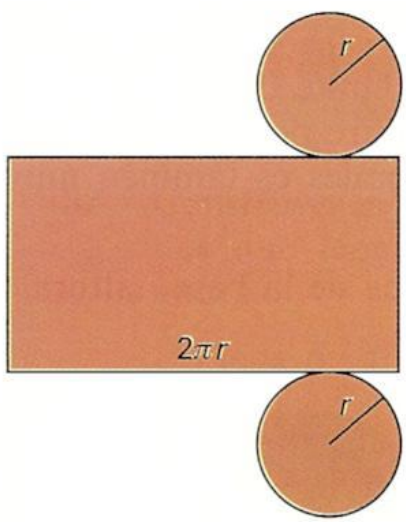
CUERPOS DE REVOLUCIÓN

Existen cuerpos geométricos que no tienen caras no aristas como los poliedros y que pueden obtenerse mediante el giro de una figura plana alrededor de un eje: por eso se les llama **cuerpos de revolución**. Los principales son el cilindro, el cono y la esfera.

Cilindro

Un cilindro recto es un cuerpo geométrico engendrado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.





ÁREA DEL CILINDRO

Observando el desarrollo de un cilindro, se aprecia que su superficie lateral es un rectángulo cuya base es igual al perímetro de círculo, $2\pi r$, y cuya altura, h, es la del cilindro. Por tanto,

$$A = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

VOLUMEN DEL CILINDRO

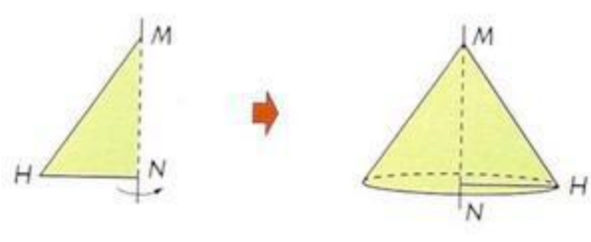
El volumen de un cilindro es igual al área de la base por la altura:

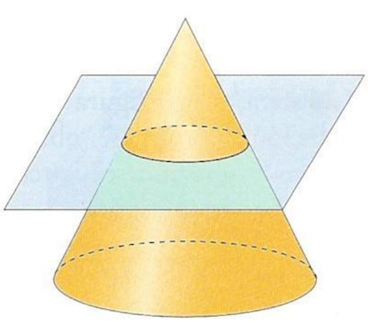
$$V = \pi r^2 h$$

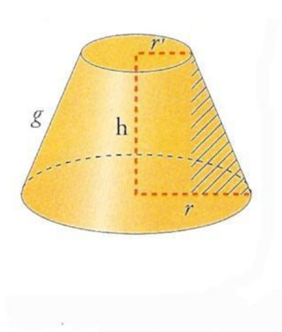
SIMULACIÓN: Un tubo de agua de 10 m de longitud tiene un diámetro exterior de 20 cm y un grosor de 2 cm. Halla su volumen.

Cono

Un cono recto es un cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos.



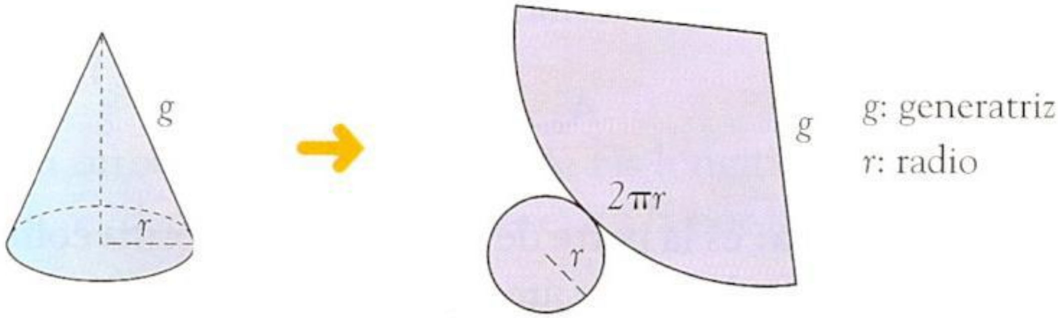




Si se corta un cono recto por un plano paralelo a la base se obtiene un nuevo cuerpo que se llama tronco de cono.

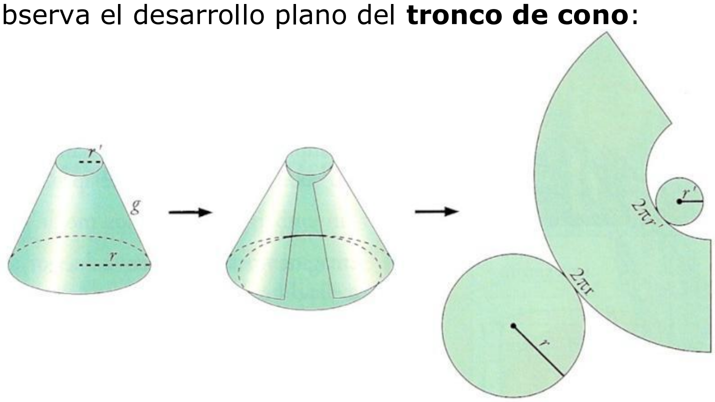
ÁREA DE UN CONO Y DE UN TRONCO DE CONO

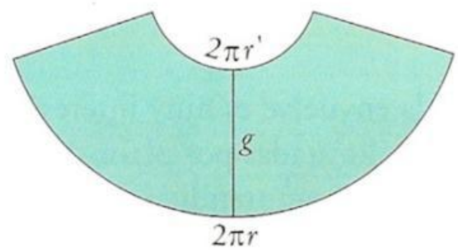
El área de un **cono** es la suma del área lateral (sector circular de radio *g*) y del área de la base:



$$A_{CONO} = A_{LATERAL} + A_{BASE} = \pi g r + \pi r^2 = \pi r(g + r)$$

Observa el desarrollo plano del **tronco de cono**:





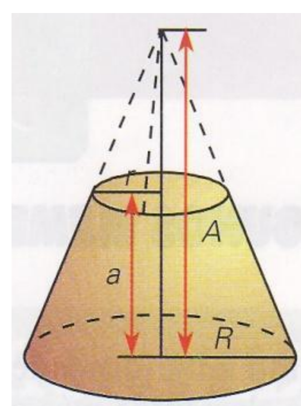
El **área lateral** se obtiene como si fuera un trapecio:

$$A_{lateral} = \frac{\text{suma de las bases}}{2} \cdot \text{altura} = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \cdot g = \pi(r + r') \cdot g$$

El área total es igual al área lateral más el área de los círculos de las dos bases:

$$A_{tronco\ de\ cono} = A_{lateral} + \pi r^2 + \pi r'^2$$

VOLUMEN DE UN CONO Y DE UN TRONCO DE CONO



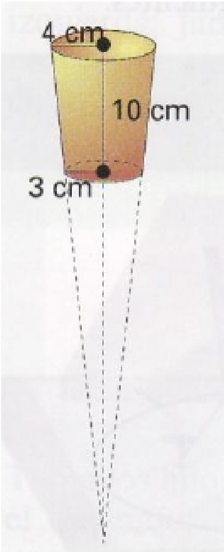
El **volumen de un cono** es igual a un tercio del área de la base por la altura:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

El **volumen de un tronco de cono** se puede obtener restando el volumen del cono completo menos el de cono superior que se ha suprimido:

$$V_{TRONCO\ DE\ CONO} = \frac{1}{3}\pi R^2 A - \frac{1}{3}\pi r^2 a = \frac{1}{3}\pi(R^2 A - r^2 a)$$

Veamos un ejemplo de aplicación:



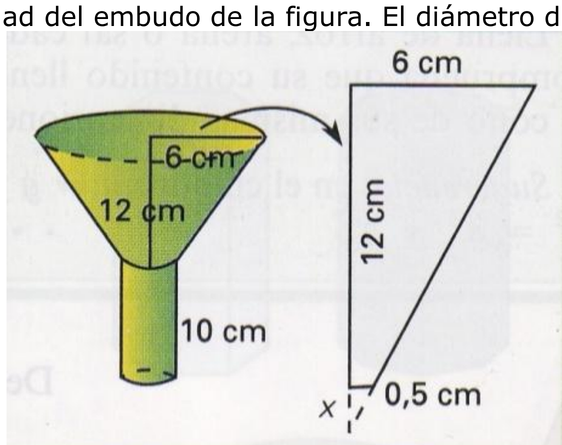
Ejemplo: ***¿Cuál es la máxima cantidad de agua que admite un vaso cuya forma y dimensiones muestra la figura del margen?***

$$\frac{4}{3} = \frac{10+x}{x} \rightarrow 4x = 3(10+x) \rightarrow x = 30\ cm$$

Sustituyendo en la fórmula del volumen del tronco de cono:

$$V_{TRONCO\ DE\ CONO} = \frac{1}{3}\pi(R^2A - r^2a) = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot(4^2\cdot 40 - 3^2\cdot 30) \cong 123{,}3\ cm^3$$

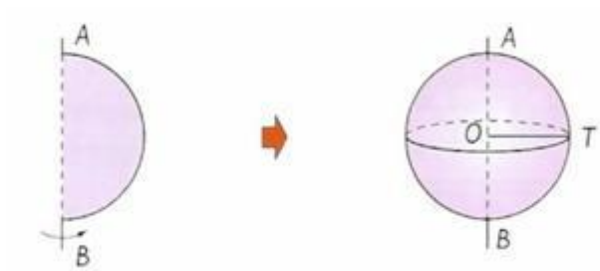
SIMULACIÓN: Calcula la capacidad del embudo de la figura. El diámetro del cilindro es de 1 cm.



Esfera

Una esfera es un sólido de revolución que se puede obtener al girar un semicírculo alrededor de su diámetro.
La esfera queda determinada por su centro y por su radio.

No tiene desarrollo plano.



ÁREA Y VOLUMEN DE UNA ESFERA

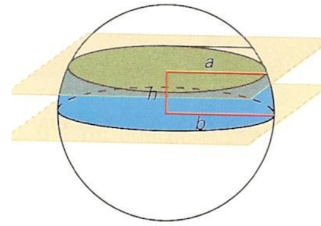
$$A = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

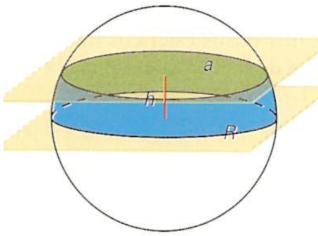
SIMULACIÓN: Se introduce una esfera de 2 cm de radio en un cilindro del mismo radio y cuya altura es igual al diámetro de la esfera. Calcula:
(a) El volumen del cilindro.
(b) El volumen de la esfera.
(c) El volumen del hueco entre el cilindro y la esfera.

En la esfera se dan diferentes superficies que dan lugar a los correspondientes sólidos:

- **Segmento esférico** es el sólido que resulta al cortar la esfera por dos planos paralelos. Su volumen es: $$V = \frac{\pi}{6}h(h^2 + 3a^2 + 3b^2)$$



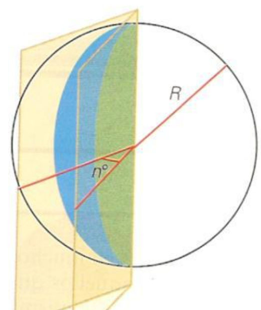
Segmento esférico de dos bases



Zona esférica

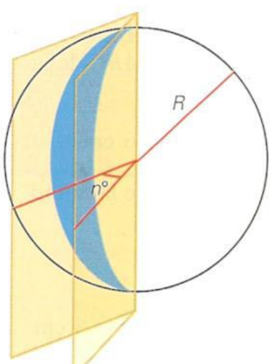
- La banda de superficie que limita al segmento esférico se llama **zona esférica.**

Su área es: $$A = 2\pi \cdot R \cdot h$$



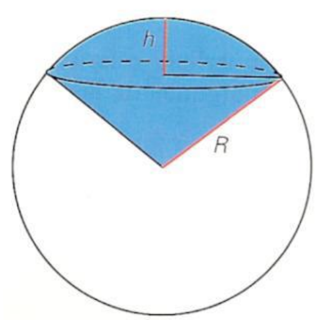
Cuña esférica

- **Cuña esférica** es el equivalente a un gajo de naranja. Se obtiene al cortar la esfera mediante dos planos que confluyen en un diámetro de la misma. Su volumen es: $$V = \frac{\pi \cdot R^3 \cdot n°}{270°}$$



Huso esférico

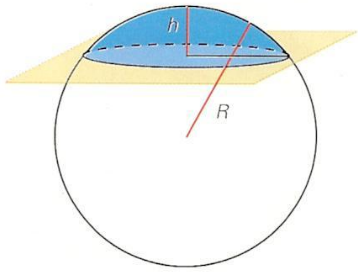
- La parte de superficie esférica que limita a una cuña esférica se denomina **huso esférico.** Su área es: $$A = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot n°}{360°}$$



Sector esférico

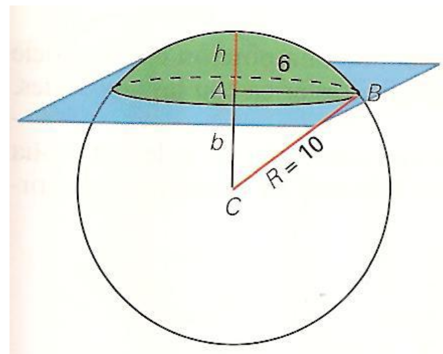
- **Sector esférico** es el sólido que se obtiene al hacer girar un sector circular sobre el diámetro perpendicular a su cuerda. Su volumen es: $$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot h$$

- La parte curva de un sector esférico se denomina **casquete esférico.** Su área es: $A = 2\pi \cdot R \cdot h$



Casquete esférico

Veamos un ejemplo:



Ejemplo: ***Cortamos una esfera de 10 cm de radio con un plano para obtener un casquete esférico. Hemos medido el diámetro de la base obteniendo como resultado 12 cm. ¿Qué superficie tiene el casquete?***

Para poder aplicar la fórmula del área del casquete necesitamos conocer su altura. Para ello, basta fijarnos en el triángulo ABC de la figura del margen.

La hipotenusa es el radio de la esfera, es decir, R=10 cm.

El cateto AB es el radio de la base del casquete, que mide la mitad del diámetro: r=6 cm.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$6^2 + b^2 = 10^2 \rightarrow 36 + b^2 = 100 \Longrightarrow b = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8\ cm$$

Por tanto, la altura h del casquete será:

$$h = R - b = 10 - 8 = 2\ cm$$

Y su área es:

$$A = 2\pi \cdot R \cdot h = 2\pi \cdot 10 \cdot 2 = 40\pi = 125{,}66\ cm^2$$

EJERCITACIÓN

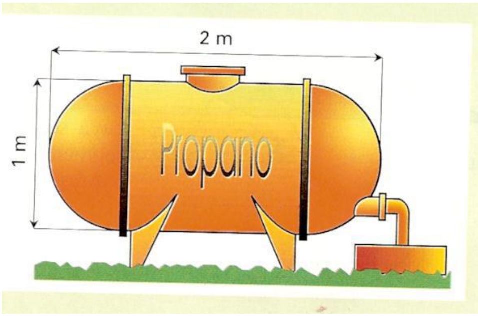
1) De los sólidos que se derivan de la esfera, ¿cuáles son de revolución y cuáles no? Para aquellos sólidos de revolución, indica qué figura genera el sólido.

2) Localiza y describe tres objetos que están formados, total o parcialmente, por partes de la esfera. (Haz fotos o esquemas)

3) Calcula el área y el volumen de una esfera cuyo diámetro mide 18 cm. Halla el área de una zona esférica de 11 cm de altura.

4) Halla la cantidad de pintura necesaria para pintar la cúpula semiesférica de una catedral, cuyo diámetro es de 12 m, sabiendo que para pintar 5 metros cuadrados usamos 2 kg de pintura.

5) Un depósito de propano está formado por un cuerpo cilíndrico y dos semiesferas iguales. La longitud total del depósito es de 2 m y su diámetro de 1 m. Calcula su volumen.



6) Introducimos un casquete esférico de 7 cm de altura, y cuya esfera tiene 15 cm de radio, dentro de un cilindro cuya base y altura son las mismas que las del casquete. ¿Qué es mayor, el área del casquete o el área lateral del cilindro?